Formas cuadráticas

Notas para los cursos 21 y 22 (J.L. Mancilla Aguilar)

1. Formas Cuadráticas

Después de las funciones lineales, las formas cuadráticas son las más usuales en las aplicaciones ingenieriles. Aparecen en procesamiento de señales, control, estadística, física, en este último caso modelando funciones de energía cinética o potencial, etc.

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que se puede expresar en la forma

$$Q(x) = x^T Ax$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica.

Veamos algunos ejemplos:

1. $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \|x\|^2$, es una forma cuadrática pues $Q(x) = x^T Ix$.

2. Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x^T Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Un sencillo cálculo muestra que $Q(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2$.

En general, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonal se tiene que

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{1\le i\le n} a_{ii}x_i^2.$$

A este tipo de forma cuadrática se la denomina forma *diagonal* o *sin productos cruzados*.

3. Consideremos ahora $Q(x) = x^T Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Efectuando el producto matricial obtenemos

$$\begin{aligned} Q(x) &= 5x_1^2 + 1x_1x_2 - 2x_1x_3 \\ &\quad +1x_2x_1 - 2x_2^2 + 3x_2x_3 \\ &\quad -2x_3x_1 + 3x_3x_2 - 1x_3^2, \end{aligned}$$

que es la sumatoria de todos los posibles productos x_ix_j multiplicados por el correspondiente coeficiente a_{ij} de la matriz A, en otras palabras,

$$Q(x) = \sum_{1\le i,j\le 3} a_{ij}x_ix_j.$$

Como la matriz A es simétrica y $x_i x_j = x_j x_i$, podemos reducir la expresión de $Q(x)$ a

$$\begin{aligned} Q(x) \quad = \quad & 5x_1^2 + 2 \cdot 1x_1x_2 - 2 \cdot 2x_1x_3 \\ & -2x_2^2 + 2 \cdot 3x_2x_3 \\ & -1x_3^2 \end{aligned}$$

con lo cual ahora sólo aparecen los términos de la forma $x_i x_j$, con $i \leq j$, multiplicados por a_{ii} si $i = j$ y por $2a_{ij}$ si $i \neq j$, en otras palabras

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i \leq 3} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij} x_i x_j.$$

En general, si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y $Q(x) = x^T Ax$ entonces

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Teniendo en cuenta esto último, es muy sencillo obtener la expresión de $Q(x)$ en términos de las variables x_i, por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} Q(x) = x^T Ax \quad &= \quad 2x_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x_1x_2 + 2 \cdot (-1)x_1x_3 + 3x_2^2 + 2 \cdot 0 \cdot x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= \quad 2x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2 \end{aligned}$$

Por otra parte si $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es

$$Q(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2,$$

entonces $Q(x) = x^T Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Sea $Q(x) = x^T Bx$ con

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Aparentemente $Q(x)$ no es una forma cuadrática, pues B no es simétrica; sin embargo sí lo es, ya que

$$Q(x) = x^T Bx = 5x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2x_1 - 2x_2^2 = 5x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2 = x^T Ax$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

En general, si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está definida por $Q(x) = x^T Bx$, con $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no necesariamente simétrica, como

$$x^T Bx = (x^T Bx)^T = x^T B^T x \quad \Rightarrow \quad 2Q(x) = x^T Bx + x^T B^T x = x^T (B + B^T)x,$$

se tiene que

$$Q(x) = x^T \left(\frac{B + B^T}{2}\right) x,$$

y por lo tanto $Q(x)$ es forma cuadrática, ya que $A = \left(\frac{B+B^T}{2}\right)$ es simétrica.

Las formas cuadráticas no son lineales pues, en general, no se cumple la relación $Q(x+y) = Q(x)+Q(y)$ ni tampoco la igualdad $Q(\alpha x) = \alpha Q(x)$. Sin embargo las formas cuadráticas tienen la siguiente propiedad:

$$Q(\alpha x) = (\alpha x)^T A(\alpha x) = \alpha^2 (x^T Ax) = \alpha^2 Q(x).$$

Dada una forma cuadrática $Q(x)$ usualmente nos interesa conocer lo siguiente:

- Su signo, es decir, si $Q(x)$ es siempre positiva o siempre negativa, o si toma valores positivos y negativos;
- la forma de sus conjuntos de nivel, esto es, dado $c \in \mathbb{R}$, qué clase de conjunto (curva si $n = 2$, superficie si $n = 3$) define la ecuación

$$Q(x) = c;$$

- los valores máximo y mínimo que alcanza $Q(x)$ cuando x varía entre los vectores unitarios, es decir, cuando $\|x\| = 1$.

En lo que sigue responderemos esas preguntas. Pero antes veremos como mediante un cambio de variable lineal es posible transformar una forma cuadrática con productos cruzados en una que carece de éstos, es decir, en una forma diagonal.

1.1. Eliminación de productos cruzados

Consideremos la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Con el objeto de simplificar la expresión de $Q(x)$, es decir, de eliminar los términos de la forma $x_i x_j$ con $i \neq j$ que complican el análisis de la misma, consideremos el cambio de variable $x = Py$ con P inversible. Entonces, si $x = Py$,

$$Q(x) = x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T (P^T AP)y = \tilde{Q}(y).$$

Como queremos que $\tilde{Q}(y)$ esté libre de productos cruzados, debemos elegir P de modo tal que la matriz $D = P^T AP$ sea diagonal. Pero ello siempre es posible dado que A, por ser simétrica, es diagonalizable ortogonalmente, es decir, existen P ortogonal y D diagonal tales que

$$A = PDP^T \quad (D = P^T AP).$$

Entonces, tomando tal P (cuyas columnas son autovectores de A y forman una b.o.n. de $\mathbb{R}^n$) y efectuando el cambio de variable $x = Py$, tenemos que

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de A.

Hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 1 **(Teorema de los ejes principales)** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Entonces existe un cambio de variable ortogonal $x = Py$ ($P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal) que transforma la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ en una forma cuadrática sin productos cruzados, es decir,*

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = y^T D y, \qquad \text{si } x = Py,$$

con $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal. Además, los elementos de la diagonal de D son los autovalores de A y las columnas de la matriz P son autovectores de A y forman una b.o.n de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1 Apliquemos este resultado a la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante $Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$. La matriz asociada es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix},$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -7$. Entonces, según el Teorema de los ejes principales, existe un cambio de variable $x = Py$, con P ortogonal, tal que

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = 3y_1^2 - 7y_2^2,$$

La matriz P debe diagonalizar ortogonalmente a la matriz A, esto es, $A = PDP^T$ con

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[2\ \ -1]^T\} \qquad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[1\ 2]^T\},$$

normalizando los generadores de los autoespacios obtenemos la base ortonormal

$$B = \left\{ \left[\frac{2}{\sqrt{5}} \ \ -\frac{1}{\sqrt{5}} \right]^T, \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \ \ \frac{2}{\sqrt{5}} \right]^T \right\}$$

y, a partir de ella, definimos

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

El cambio de variable que hemos efectuamos para eliminar los productos cruzados puede ser interpretado geométricamente de la siguiente manera:
Llamemos u_1 al primer vector de la b.o.n. B (que es la primera columna de P) y u_2 al segundo vector de B (segunda columna de P). Entonces, si $x \in \mathbb{R}^2$ y $x = Py$ tenemos que

$$x = Py = [u_1\ u_2][y_1\ y_2]^T = y_1u_1 + y_2u_2,$$

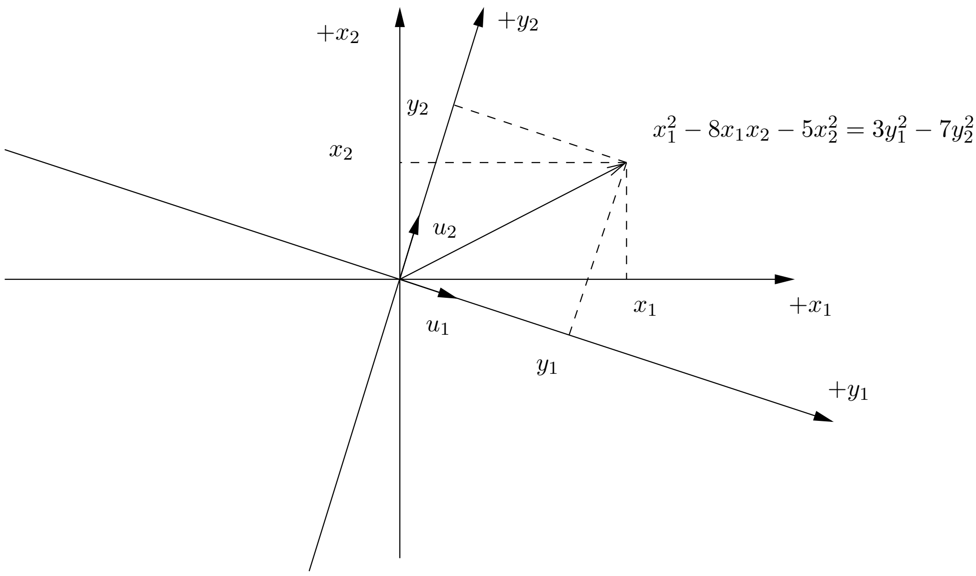

Figura 1:

con lo cual y no es otra cosa que el vector de coordenadas de x en la base B, es decir, $y = [x]_B$.

Gráficamente, si ubicamos los vectores u_1 y u_2 en el plano x_1x_2 y trazamos un par de ejes y_1, y_2 siguiendo las direcciones de u_1 y u_2 respectivamente, tenemos que $[y_1\ y_2]^T$ son las coordenadas del vector x respecto del sistema de ejes cartesianos y_1y_2, y que $\tilde{Q}(y) = 3y_1^2 - 7y_2^2$ es el valor de $Q(x)$ en función de las coordenadas de x en el sistema de coordenadas y_1y_2. (Ver figura 1.)

Entonces, podemos interpretar geométricamente el cambio de variables $x = Py$ que elimina los productos cruzados, como la adopción de un sistema de ejes cartesianos (elección de una b.o.n B) en el cual la variable y representa las coordenadas de x respecto de ese sistema ($y = [x]_B$), y la expresión de $Q(x)$ en términos de esas coordenadas carece de productos cruzados. Por esta razón a las rectas que generan las columnas de la matriz P se las denominan *ejes principales* de la forma cuadrática Q. Es usual tomar P con $\det(P) = 1$, pues de esa manera el sistema de ejes ortogonales definidos por las columnas de P se obtienen rotando el sistema de ejes cartesiano original.

1.2. Clasificación de formas cuadráticas

Definición. Dada una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ decimos que Q es:

a) Definida positiva (d.p.) si $Q(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

b) Semidefinida positiva (s.d.p.) si $Q(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

c) Definida negativa (d.n.) si $Q(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

d) Semidefinida negativa (s.d.n.) si $Q(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

e) Indefinida si no es ninguna de las anteriores, es decir, si existen x y x^* tales que $Q(x) > 0$ y $Q(x^*) < 0$.

Notamos que toda forma cuadrática Q d.p. (d.n.) es s.d.p. (s.d.n), pero que no vale la recíproca, y que Q es d.p. (s.d.p) si y sólo si $-Q$ es d.n. (s.d.n.).

Definición. Dada una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, decimos que A es definida positiva, semidefinida positiva, etc, si la forma cuadrática asociada $Q(x) = x^T Ax$ es, respectivamente, definida positiva, semidefinida positiva, etc.

Veamos algunos ejemplos:

1. $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ es d.p., ya que siempre $Q(x) \geq 0$, y $Q(x) = 0$ sólo si $x = 0$.
2. $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ es s.d.p., pues $Q(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$, pero $Q([0\,0\,1]^T) = 0$.
3. $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2+2x_2^2-3x_3^2$ es indefinida, pues $Q([1\,0\,0\,0]^T) = 1$ y $Q([0\,0\,1\,0]^T) = -3$.
4. Por último, $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$ es d.n. y $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -x_1^2 - 2x_3^2$ es s.d.n.

De acuerdo con los ejemplos anteriores, cuando la forma cuadrática carece de *productos cruzados*, es decir, cuando $Q(x) = x^T Dx$ con

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

se tiene que Q es:

- d.p. si $\lambda_i > 0$ para todo i;
- s.d.p. si $\lambda_i \geq 0$ para todo i;
- d.n. si $\lambda_i < 0$ para todo i;
- s.d.n. si $\lambda_i \leq 0$ para todo i;
- indefinida si existe un par de índices i, j tales que $\lambda_i > 0$ y $\lambda_j < 0$.

Si $Q(x) = x^T Ax$ tiene productos cruzados, es decir, si A no es una matriz diagonal, empleando un cambio de variables ortogonal $x = Py$ que elimine productos cruzados, tenemos que

$$Q(x) = y^T Dy = \tilde{Q}(y),$$

con D diagonal. Como Q y $\tilde{Q}$ tienen el mismo signo, y el signo de esta última está determinado por los elementos en la diagonal de D, que son los autovalores de A, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de A. Entonces $Q(x) = x^T Ax$ es*

- *d.p. si* $\lambda_i > 0$ *para todo* i*;*
- *s.d.p. si* $\lambda_i \geq 0$ *para todo* i*;*
- *d.n. si* $\lambda_i < 0$ *para todo* i*;*
- *s.d.n. si* $\lambda_i \leq 0$ *para todo* i*;*
- *indefinida si existe un par de índices* i, j *tales que* $\lambda_i > 0$ *y* $\lambda_j < 0$.

Ejemplo 2 Clasificar la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$, $Q(x) = x^T A x$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como A es simétrica y sus autovalores son: $7, 2$ y -3, tenemos que $Q(x)$ es indefinida.

Ejemplo 3 Determinar para qué valores de a, la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$, $Q(x) = x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2$, es definida positiva.

Como $Q(x) = x^T A x$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix},$$

basta con determinar para qué valores de a los autovalores de A son positivos.

Como

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = a + 1 \ \vee \ \lambda = 1 - a,$$

tenemos que $Q(x)$ es definida positiva si y sólo si

$$a + 1 > 0 \ \wedge \ 1 - a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > -1 \ \wedge \ a < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |a| < 1.$$

1.3. Conjuntos de Nivel

Vamos a ver ahora cómo el cambio de variables que elimina los productos cruzados nos ayuda en el estudio de los conjuntos de nivel de una forma cuadrática. (En este punto se presupone que el alumno conoce las ecuaciones canónicas de las cónicas y las cuádricas.)

Dada una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $c \in \mathbb{R}$ se define el conjunto de nivel c como

$$\mathcal{N}_c(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Q(x) = c\}.$$

Es decir, $\mathcal{N}_c(Q)$ es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ en los cuales Q toma el valor c. Si Q representa una temperatura, el conjunto de nivel es lo que se conoce como isoterma, si Q fuese una energía potencial en $\mathbb{R}^3$, entonces el conjunto de nivel es lo que usualmente se denomina superficie equipotencial.

Para determinar qué tipo de conjunto es $\mathcal{N}_c(Q)$, empleando un cambio de variables $x = Py$ que elimine productos cruzados, tenemos que $Q(x) = \tilde{Q}(y) = y^T D y$ con D diagonal, y que, para un dado $c \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = c \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{Q}(y) = c.$$

Entonces, teniendo en cuenta la interpretación geométrica del cambio de variables, tenemos que el conjunto de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$ se obtiene rotando adecuadamente el conjunto de nivel $\mathcal{N}_c(\tilde{Q})$ (los ejes y_i se hacen coincidir con las rectas generadas por las columnas de P). En particular, ambos conjuntos de nivel tienen la misma forma geométrica.

Ejemplo 4 Consideremos la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$. Queremos graficar el conjunto de nivel

$$Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 = 21.$$

De acuerdo con lo que vimos en el Ejemplo 1, si consideramos el cambio de variable $x = Py$, con

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

tenemos que en términos de la variable y, los elementos del conjunto de nivel buscado verifican la ecuación

$$3y_1^2 - 7y_2^2 = 21,$$

o, equivalentemente, dividiendo ambos miembros por 21,

$$\frac{y_1^2}{(\sqrt{7})^2} - \frac{y_2^2}{(\sqrt{3})^2} = 1,$$

que es la ecuación canónica de una hipérbola de ejes $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, y cuyo gráfico es, recordando la interpretación geométrica del cambio de variable:

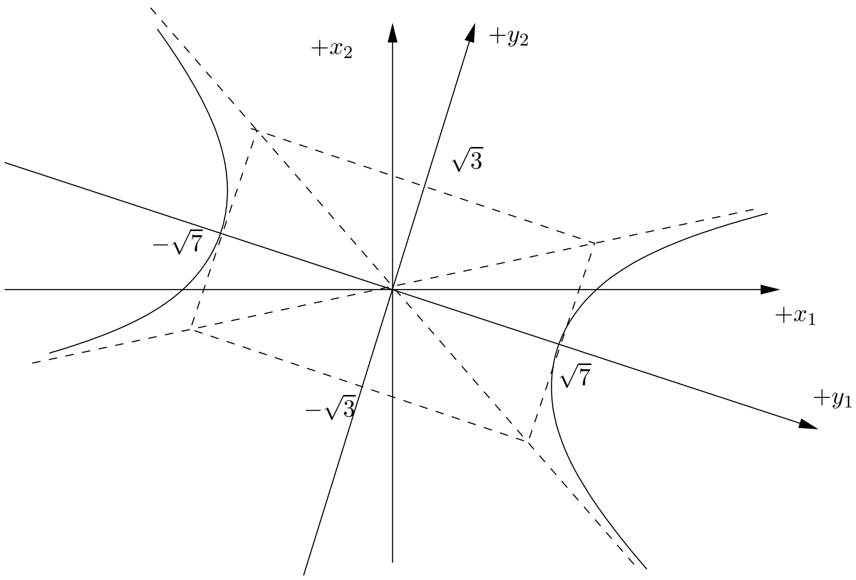

Figura 2:

Ejemplo 5 Consideremos ahora la forma cuadrática $Q(x) = x^T A x$ con

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 8 & 11 & -2 \\ 10 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Queremos identificar qué tipo de superficie es el conjunto de nivel $\mathcal{N}_{36}(Q) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ Q(x) = 36\}$.

Los autovalores de A son $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 9$ y $\lambda_3 = -9$, y sus correspondientes autoespacios son:

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\lambda_3} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces, con el cambio de variable ortogonal $x = Py$, donde

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

es la matriz que se obtiene poniendo como columnas los generadores de los autoespacios previamente normalizados, tenemos que

$$Q(x) = 36 \iff \tilde{Q}(y) = 36,$$

siendo $\tilde{Q}(y) = 18y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$.

Pero

$$18y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2 = 36 \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \frac{y_1^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{2^2} - \frac{y_3^2}{2^2} = 1,$$

es la ecuación de un hiperboloide de una hoja, cuyo gráfico es el siguiente:

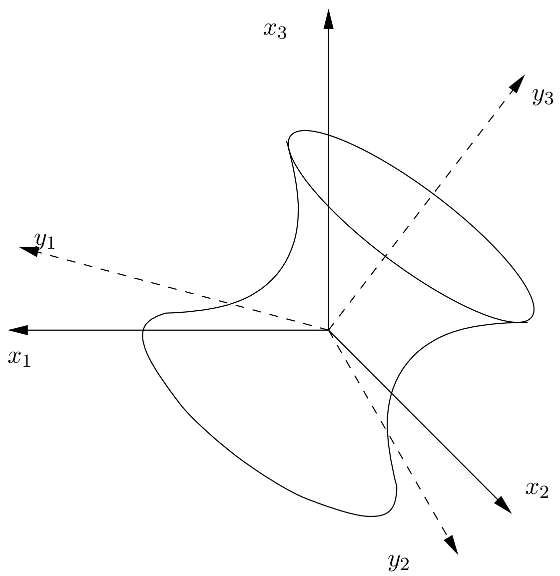

Figura 3:

2. Optimización de formas cuadráticas con restricciones

El problema que nos interesa resolver ahora es el siguiente: dada una forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, hallar los valores máximo y mínimo de $\frac{Q(x)}{\|x\|^2}$, $x \neq 0$, o, alternativamente, los máximos y mínimos de $Q(x)$ bajo la restricción $\|x\| = 1$, restricción que también podemos escribir $x^T x = 1$.

La resolución del problema es sencilla si $Q(x)$ carece de productos cruzados. Para ilustrarlo consideremos la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, con $Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 5x_4^2$.

Como $-2x_3^2 \leq 3x_3^2$ y $-5x_4^2 \leq 3x_4^2$, tenemos que

$$3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 5x_4^2 \leq 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 = 3\|x\|^2. \tag{1}$$

Por otro lado, dado que $3x_1^2 \geq -5x_1^2$, $3x_2^2 \geq -5x_2^2$ y $-2x_3^2 \geq -5x_3^2$, resulta

$$3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 5x_4^2 \leq 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 = 3\|x\|^2. \tag{2}$$

Entonces, de (1) y (2) deducimos que

$$-5\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 3\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

con lo cual

$$-5 \leq \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 - \{0\}.$$

Por lo tanto,

$$\max_{\|x\| \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq 3 \qquad \text{y} \qquad \min_{\|x\| \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \geq -5.$$

Veamos ahora que el máximo es 3 y que el mínimo es -5. Para probarlo basta exhibir un par de vectores x_M, x_m tales que $\frac{Q(x_M)}{\|x\|^2} = 3$ y $\frac{Q(x_m)}{\|x\|^2} = -5$, por ejemplo $x_M = [1\ 0\ 0\ 0]^T$ y $x_m = [0\ 0\ 0\ 1]^T$. También sirven $x_M = [-1\ 0\ 0\ 0]^T$ y $x_m = [0\ 0\ 0\ -1]^T$. Es decir, tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en más de un vector.

Para hallar todos los maximizantes, determinemos primero para qué valores de $x \in \mathbb{R}^4$ vale la igualdad $Q(x) = 3\|x\|^2$. Planteando

$$3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 5x_4^2 = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 \Leftrightarrow 5x_3^2 + 8x_4^2 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0, x_4 = 0,$$

concluimos que

$$Q(x) = 3\|x\|^2 \Longleftrightarrow x = [x_1\ x_2\ 0\ 0]^T.$$

En resumen,

$$\max_{\|x\| \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = 3 \quad \text{y el máximo se alcanza en los vectores no nulos de la forma} \quad x = [x_1\ x_2\ 0\ 0]^T.$$

Si ahora imponemos la restricción $\|x\| = 1$, es inmediato que

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = 3 \text{ y que el máximo se alcanza en los } x = [x_1\ x_2\ 0\ 0]^T \text{ con } \|x\| = 1.$$

Respecto de los minimizantes, procediendo como antes, pero buscando ahora aquellos x que satisfacen la igualdad $Q(x) = -5\|x\|^2$, concluimos que

$$\min_{\|x\| \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = -5 \text{ y el mínimo se alcanza en los vectores no nulos de la forma } x = [0\ 0\ 0\ x_4]^T.$$

Bajo la restricción $\|x\| = 1$ es inmediato que

$$\min_{\|x\|=1} Q(x) = -5 \text{ y que el máximo se alcanza en los } x = [0\ 0\ 0\ x_4]^T \text{ con } \|x\| = 1,$$

que en este caso son sólo dos, $x = [0\ 0\ 0\ 1]^T$ y $x = [0\ 0\ 0\ -1]^T$.

Observe que en este ejemplo el máximo y el mínimo de valor que toman los cocientes $\frac{Q(x)}{\|x\|^2}$ ($x \neq 0$) (denominados cocientes de Rayleigh), son, respectivamente, el máximo y el mínimo coeficiente de la forma cuadrática. Además, los maximizantes (minimizantes) son los vectores que tienen nulas las componentes correspondientes a los coeficientes de la forma cuadrática que son distintos del máximo (mínimo).

Caso general

Estudiemos ahora el caso general, es decir $Q(x) = x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica.

Sean P ortogonal y D diagonal tales que $A = PDP^T$. Recordemos que D tiene en su diagonal a los autovalores de A y que las columnas de P son autovectores de A.

Llamemos λ_M y λ_m al máximo y al mínimo autovalor de A respectivamente, y supongamos que hemos ordenado los autovalores de A en forma decreciente, que λ_M tiene multiplicidad r y que λ_m tiene multiplicidad k, es decir

$$\lambda_M = \lambda_1 = \cdots = \lambda_r < \lambda_{r+1} \leq \cdots < \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n = \lambda_m.$$

Entonces, si $P = [u_1 \cdots u_n]$ tenemos que

$$\mathcal{S}_{\lambda_M} = \text{gen}\{u_1, \ldots, u_r\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S}_{\lambda_m} = \text{gen}\{u_{n-k+1}, \ldots, u_n\}.$$

Con el cambio de variable $x = Py$ la forma cuadrática Q adquiere la expresión

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que

$$\lambda_i y_i^2 = \lambda_M y_i^2 \text{ para todo } 1 \leq i \leq r \quad \text{y} \quad \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_M y_i^2 \text{ para todo } r+1 \leq i \leq n, \tag{4}$$

deducimos inmediatamente la desigualdad

$$Q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_M (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_M \|y\|^2. \tag{5}$$

Como P es ortogonal, y por lo tanto $\|y\| = \|x\|$, resulta

$$Q(x) \leq \lambda_M \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (3) y que

$$\lambda_i y_i^2 \geq \lambda_m y_i^2 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n-k \quad \text{y} \quad \lambda_i y_i^2 = \lambda_m y_i^2 \text{ para todo } n-k+1 \leq i \leq n,$$

resulta la desigualdad

$$Q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \geq \lambda_m (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_m \|y\|^2, \tag{6}$$

y de allí, teniendo en cuenta nuevamente que $\|x\| = \|y\|$, obtenemos

$$Q(x) \geq \lambda_m \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En resumen, hemos probado que

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

y por lo tanto que

$$\max_{\|x\| \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq \lambda_M \qquad \text{y} \qquad \min_{\|x\| \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \geq \lambda_m.$$

Ahora veamos que el máximo es λ_M y que el mínimo es λ_m. Para ello basta exhibir vectores x_M y x_m tales que $\frac{Q(x_M)}{\|x\|^2} = \lambda_M$ y $\frac{Q(x_m)}{\|x\|^2} = \lambda_m$.

Como estamos interesados en hallar todos los maximizantes y todos los minimizantes, procedamos como en el ejemplo anterior. Primero busquemos los x que verifican la igualdad

$$Q(x) = \lambda_M \|x\|^2.$$

Como $x = Py$, $\|x\| = \|y\|$ y $Q(x) = y^T D y$, esto es equivalente a buscar los y que verifican la igualdad

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = \lambda_M \|y\|^2.$$

De (4) se deduce inmediatamente que estos resultan ser todos los y de la forma

$$y = [y_1 \cdots y_r \; 0 \cdots 0]^T.$$

Luego, los x que verifican $Q(x) = \lambda_{max} \|x\|^2$ son aquéllos de la forma

$$x = P[y_1 \cdots y_r \; 0 \cdots 0]^T = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_r u_r.$$

Como $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es base de $\mathcal{S}_{\lambda_M}$, hemos demostrado que

$$Q(x) = \lambda_M \|x\|^2 \Longleftrightarrow x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}.$$

Por lo tanto,

$$\max_{\|x\| \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \lambda_M \quad \text{y el máximo se alcanza en los } x \in \mathcal{S}_{\lambda_M} - \{0\}.$$

Respecto de los minimizantes, procediendo en forma similar se deduce que

$$Q(x) = \lambda_m \|x\|^2 \Longleftrightarrow x \in \mathcal{S}_{\lambda_m},$$

con lo cual

$$\min_{\|x\| \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \lambda_m \quad \text{y el mínimo se alcanza en los } x \in \mathcal{S}_{\lambda_m} - \{0\}.$$

Si ahora imponemos la restricción $\|x\| = 1$, de lo anterior resulta inmediatamente que

$$\max_{\|x\| = 1} Q(x) = \lambda_M, \qquad \min_{\|x\| = 1} Q(x) = \lambda_m,$$

que el máximo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}$ tales que $\|x\| = 1$ y que el mínimo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m}$ tales que $\|x\| = 1$.

Hemos demostrado el siguiente

Teorema 3 *(Rayleigh) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $Q(x) = x^T Ax$. Sean λ_M y λ_m los autovalores máximo y mínimo de A respectivamente, y sean $\mathcal{S}_{\lambda_M}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m}$ los respectivos autoespacios. Entonces*

1. $\lambda_m\|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ *(Desigualdad de Rayleigh).*
   Además, $Q(x) = \lambda_m\|x\|^2$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m}$ y $Q(x) = \lambda_M\|x\|^2$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}$.
2. $\max_{\|x\|\neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \lambda_M$ *y el máximo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M} - \{0\}$.*
3. $\min_{\|x\|\neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \lambda_m$ *y el mínimo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m} - \{0\}$.*

En particular, $\max_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_M$ (resp. $\min_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_m$) y el máximo (resp. mínimo) se produce en los autovectores unitarios asociados a λ_M (resp. λ_m).

Ejemplo 6 Consideremos la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = -(\lambda + 2)(\lambda - 4)^2,$$

con lo cual, los autovalores máximo y mínimo de A son $\lambda_M = 4$, $\lambda_m = -2$. Por lo tanto

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \min_{\|x\|=1} Q(x) = -2.$$

Para hallar los maximizantes y minimizantes debemos hallar primero los autoespacios asociados a los autovalores máximo y mínimo. Calculando obtenemos

$$\mathcal{S}_{\lambda_M} = \text{gen}\{[1\ 1\ 1]^T, [1\ -1\ 0]^T\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S}_{\lambda_m} = \text{gen}\{[1\ 1\ -2]^T\}.$$

Entonces $Q(x)$ sujeto a la restricción $\|x\| = 1$ alcanza el mínimo en los vectores unitarios de $\mathcal{S}_{\lambda_m}$, que en este caso son sólo dos

$$v_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right]^T \qquad \text{y} \qquad v_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ \frac{2}{\sqrt{6}}\right]^T.$$

Respecto de los maximizantes, estos son los vectores unitarios de $\mathcal{S}_{\lambda_M}$, es decir, los de la forma

$$x = \alpha[1\ 1\ 1]^T + \beta[1\ -1\ 0]^T \qquad \text{con} \qquad \|x\| = 1.$$

Para obtener una expresión algo más explícita de los maximizantes, es conveniente trabajar con una b.o.n del autoespacio, ya que si $\{u_1, u_2\}$ es b.o.n de $\mathcal{S}_{\lambda_M}$, dado que $\|\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, tenemos que los x que maximizan Q sujeto a la restricción son aquellos de la forma

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad \text{con} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1.$$

Como $\left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T, \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\right]^T \right\}$ es b.o.n. de $\mathcal{S}_{\lambda_M}$, entonces los maximizantes son los $x \in \mathbb{R}^3$ de la forma:

$$x = \alpha_1 \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T + \alpha_2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\right]^T, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1.$$

Notamos que en este caso hay un número infinito de maximizantes y que todos ellos se encuentran sobre la circunferencia de radio 1 centrada en el origen que está contenida en el plano $\mathcal{S}_{\lambda_M}$.

Ejemplo 7 Minimizar

$$Q(x) = \frac{4}{9}x_1^2 - \frac{80}{9}x_1x_2 - \frac{125}{9}x_2^2 \quad \text{sujeto a la restricción} \quad 4x_1^2 + 25x_2^2 = 9.$$

En este problema la dificultad radica en que la restricción no es de la forma $x_1^2 + x_2^2 = 1$ que ya sabemos manejar. Lo que hacemos entonces en primer lugar es un cambio de variable que transforme nuestra restricción en una de la forma estándar.

Dividiendo por 9 la restricción, ésta queda

$$\frac{4}{9}x_1^2 + \frac{25}{9}x_2^2 = 1.$$

Si consideramos el cambio de variable $z_1 = \frac{2}{3}x_1$ y $z_2 = \frac{5}{3}x_2$ (con lo cual $x_1 = \frac{3}{2}z_1$ y $x_2 = \frac{3}{5}z_2$), la restricción se escribe $z_1^2 + z_2^2 = 1$, que es lo que queríamos.

Reemplazando en la expresión de $Q(x)$, x_1 y x_2 por sus expresiones en función de z_1 y z_2, obtenemos la forma cuadrática equivalente

$$\hat{Q}(z) = z_1^2 - 8z_1z_2 - 5z_2^2.$$

Luego, minimizar $Q(x)$ con x sujeto a la restricción $4x_1^2 + 25x_2^2 = 9$ es equivalente a minimizar $\hat{Q}(z)$ con z sujeto a la restricción $z_1^2 + z_2^2 = 1$, es decir,

$$\min_{4x_1^2+25x_2^2=9} Q(x) = \min_{z_1^2+z_2^2=1} \hat{Q}(z),$$

y los minimizantes de $Q(x)$ están relacionados con los de $\hat{Q}(z)$ a través del cambio de variable inverso $x_1 = \frac{3}{2}z_1$ y $x_2 = \frac{3}{5}z_2$

Resolvamos entonces primero el problema en la variable z. La matriz simétrica asociada a la forma cuadrática $\hat{Q}(z)$ es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix},$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -7$.

Por lo tanto

$$\min_{z_1^2+z_2^2=1} \hat{Q}(z) = -7,$$

y, como

$$\mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[1\ 2]^T\},$$

los minimizantes son

$$z_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T \qquad \text{y} \qquad z_m^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T.$$

Entonces

$$\min_{4x_1^2+25x_2^2=9} Q(x) = -7,$$

y, aplicando el cambio de variable inverso a z_m y z_m^*, los minimizantes de $Q(x)$ son:

$$x_m = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{6}{5\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T \qquad \text{y} \qquad x_m^* = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2\sqrt{5}} & -\frac{6}{5\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T.$$

En general, el problema de minimizar o maximizar una forma cuadrática x^TAx, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, sujeto a la restricción sin productos cruzados

$$x^T\Lambda x = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = 1, \quad \text{con } \lambda_i > 0\ \forall i,$$

se reduce a uno con la restricción estándar $z^Tz = 1$ efectuando el cambio de variable

$$z_1 = \sqrt{\lambda_1}x_1,\ \ldots,\ z_n = \sqrt{\lambda_n}x_n,$$

que en forma matricial se expresa

$$z = \Lambda^* x \quad \text{con} \quad \Lambda^* = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \qquad (x = \Lambda^{*-1}z).$$

En efecto, con ese cambio de variable tenemos que

$$x^T\Lambda x = x^T\Lambda^{*2}x = (\Lambda^* x)^T(\Lambda^* x) = z^Tz,$$

y que,

$$x^TAx = (\Lambda^{*-1}z)^TA(\Lambda^{*-1}z) = z^T(\Lambda^{*-1}A\Lambda^{*-1})z.$$

Luego, llamando $A^* = \Lambda^{*-1}A\Lambda^{*-1}$, tenemos que,

$$\max_{x^T\Lambda x=1} x^TAx = \max_{z^Tz=1} z^TA^*z,$$

y que x maximiza x^TAx sujeto a la restricción $x^T\Lambda x = 1$ si y sólo si $x = \Lambda^{*-1}z$ y z maximiza z^TA^*z sujeto a $z^Tz = 1$. Lo mismo vale si cambiamos máximo por mínimo.

2.0.1. Máximos y mínimos con restricciones definidas positivas

En lo que sigue resolveremos un problema más general que el anterior, ya que buscaremos maximizar o minimizar una forma cuadrática $Q(x)$ sujeta a la restricción $R(x) = 1$ con $R(x)$ una forma cuadrática <u>definida positiva</u>, es decir, queremos hallar

$$\max_{R(x)=1} Q(x) \qquad \text{y} \qquad \min_{R(x)=1} Q(x).$$

Supongamos entonces que $Q(x) = x^TAx$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, y que $R(x) = x^TBx$ con $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva.

Como B es simétrica y definida positiva, existen U ortogonal y Λ diagonal tales que

$$B = U\Lambda U^T$$

y los elementos en la diagonal de Λ son todos positivos.

Sea Λ^* la matriz diagonal que se obtiene tomando las raíces cuadradas de los elementos que se encuentran en la diagonal de Λ. Entonces $\Lambda^{*2} = \Lambda$ y $B^* = U\Lambda^*U^T$ es simétrica, definida positiva y $B^{*2} = B$.

Consideremos el cambio de variable $z = B^*x$ ($x = B^{*-1}z$). Entonces

$$R(x) = x^TBx = x^TB^*B^*x = z^Tz \quad \text{y} \quad Q(x) = x^TAx = z^T(B^{*-1}AB^{*-1})z.$$

Luego, llamando $A^* = B^{*-1}AB^{*-1}$, tenemos que

$$\max_{R(x)=1} Q(x) = \max_{z^T z=1} z^T A^* z,$$

y que x maximiza $Q(x)$ sujeto a la restricción $R(x) = 1$ si y sólo si $x = B^{*-1}z$ y z maximiza $z^T A^* z$ sujeto a $z^T z = 1$. Lo mismo vale si cambiamos máximo por mínimo.

Como A^* es simétrica, si $\lambda_M(A^*)$ y $\lambda_m(A^*)$ son el máximo y el mínimo autovalor de A^*, respectivamente, y $\mathcal{S}_{\lambda_M(A^*)}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m(A^*)}$ son los correspondientes autoespacios, tenemos que

(a)

$$\max_{R(x)=1} Q(x) = \lambda_M(A^*) \qquad \text{y} \qquad \min_{R(x)=1} Q(x) = \lambda_m(A^*); \tag{7}$$

(b) el máximo (mínimo) se alcanza en los $x \in \mathbb{R}^n$ de la forma $x = B^{*-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_M(A^*)}$ (resp. $z \in \mathcal{S}_{\lambda_m(A^*)}$) tal que $\|z\| = 1$.

Con esto hemos resuelto el problema planteado. Sin embargo esta solución no es del todo satisfactoria por dos motivos: 1) tiene el inconveniente de que hay que calcular las matrices B^*, B^{*-1} y A^*, y los autovalores máximo y mínimo de ésta última y sus correspondientes autoespacios; 2) no está expresada directamente en función de los datos originales del problema, que son las matrices A y B.

Para resolver estas deficiencias necesitamos hallar la relación entre los autovalores y autoespacios de A^* y las matrices A y B. El siguiente resultado nos brinda esa información.

Teorema 4 *Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva. Sea $B^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y tal que ${B^*}^2 = B$.*

Entonces, son equivalentes:

1. *λ es autovalor de $A^* = B^{*-1}AB^{*-1}$;*

2. *λ es autovalor de $B^{-1}A$.*

Además, si x y z son tales que $z = B^*x$ ($x = B^{*-1}z$), entonces

$$A^*z = \lambda z \quad \Longleftrightarrow \quad B^{-1}Ax = \lambda x.$$

Demostración. Como $B = B^*B^*$, tenemos que

$$B^{*-1}AB^{*-1} - \lambda I = B^{*-1}(A - \lambda B)B^{*-1} = B^{*-1}B(B^{-1}A - \lambda I)B^{*-1},$$

y por lo tanto que

$$\det(B^{*-1}AB^{*-1} - \lambda I) = \det(B^{*-1})\det(B)\det(B^{-1}A - \lambda I)\det(B^{*-1}).$$

Teniendo en cuenta que $\det(B) = \det^2(B^*)$ y que $\det(B^{*-1}) = \det(B^*)^{-1}$, obtenemos la igualdad

$$\det(B^{*-1}AB^{*-1} - \lambda I) = \det(B^{-1}A - \lambda I).$$

Por lo tanto A^* y $B^{-1}A$ tienen el mismo polinomio característico y en consecuencia los mismos autovalores. Con esto queda demostrada la equivalencia entre 1. y 2.

Respecto de la segunda parte del teorema, supongamos que $z = B^*x$ y que $A^*z = \lambda z$. Entonces

$$(B^{*-1}AB^{*-1})(B^*x) = \lambda B^*x \Rightarrow B^{*-1}Ax = \lambda B^*x \Rightarrow Ax = \lambda(B^*)^2x = \lambda Bx \Rightarrow B^{-1}Ax = \lambda x.$$

Supongamos ahora que $z = B^*x$ y que $B^{-1}Ax = \lambda x$. Entonces, teniendo en cuenta que $x = B^{*-1}z$ y que $B = B^{*2}$ tenemos que

$$B^{-1}Ax = \lambda x \Rightarrow AB^{*-1}z = \lambda BB^{*-1}z \Rightarrow B^{*-1}AB^{*-1}z = \lambda B^{*-1}BB^{*-1}z \Rightarrow A^*z = \lambda z,$$

con lo cual finaliza la demostración del teorema.

Note que del teorema anterior y del hecho que la matriz $A^* = B^{*-1}AB^{*-1}$ es simétrica, y por tanto diagonalizable y con todos sus autovalores reales, se deduce el siguiente

Corolario 1 *Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva. Entonces $B^{-1}A$ es diagonalizable y sus autovalores son reales.*

Combinando lo hallado en (7) con el Teorema 4 obtenemos la siguiente solución al problema de hallar los extremos de una forma cuadrática sujeta a una restricción con matriz definida positiva.

Teorema 5 *Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva. Consideremos $Q(x) = x^TAx$ y $R(x) = x^TBx$.*

Sean $\lambda_M(A,B)$ y $\lambda_m(A,B)$ los autovalores máximo y mínimo de $B^{-1}A$ respectivamente, y sean $\mathcal{S}_{\lambda_M}(A,B)$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m}(A,B)$ los respectivos autoespacios. Entonces

1. $\max_{R(x)=1} Q(x) = \lambda_M(A,B)$ *y el máximo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}(A,B)$ que satisfacen la restricción $R(x) = 1$;*

2. $\min_{R(x)=1} Q(x) = \lambda_m(A,B)$ *y el mínimo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m}(A,B)$ que satisfacen la restricción $R(x) = 1$.*

Observación 1 Respecto del cálculo de $\lambda_M(A,B)$ y $\lambda_m(A,B)$ y de sus correspondientes autoespacios, es útil tener en cuenta que λ es autovalor de $B^{-1}A$ si y sólo si $\det(A-\lambda B) = 0$ y que x satisface $B^{-1}Ax = \lambda x$ si y sólo si $Ax = \lambda Bx$.

En efecto, la primera equivalencia se debe a que

$$\det(B^{-1}A - \lambda I) = \det(B^{-1}(A-\lambda B)) = \det(B^{-1})\det(A-\lambda B)$$

mientras que la segunda es inmediata.

Luego $\lambda_M(A,B)$ y $\lambda_m(A,B)$ son, respectivamente, la máxima y la mínima solución de la ecuación $\det(A-\lambda B) = 0$.

Autovalores y autovectores generalizados. A las raíces de la ecuación $\det(A-\lambda B) = 0$, se los denomina *autovalores generalizados* del par de matrices (A,B), mientras que a los $x \neq 0$ que satisfacen la ecuación $Ax = \lambda Bx$ se los denomina *autovectores generalizados* asociados al autovalor generalizado λ.

Ejemplo 8 Con el objeto de aplicar lo expuesto, consideremos el siguiente problema:

$$\text{Hallar el máximo de } Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \quad \text{sujeto a } 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1.$$

En este caso $Q(x) = x^T Ax$ y $R(x) = x^T Bx$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Notar que B es simétrica y definida positiva.

Luego, para hallar el máximo es necesario hallar $\lambda_M(A, B)$ que es la mayor solución de la ecuación

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} = (1 - 2\lambda)(2 - 2\lambda) - \lambda^2 = 0.$$

Como las soluciones de esta ecuación son

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1,57735 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,42265,$$

tenemos que $\lambda_M(A, B) = \lambda_1$.

Por lo tanto

$$\max_{R(x)=1} Q(x) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Respecto de los vectores en los cuales se alcanza este máximo, debemos hallar las soluciones de la ecuación

$$(A - \lambda_1 B)x = 0$$

que satisfacen $R(x) = 1$.

Como

$$\mathrm{Nul}(A - \lambda_1 B) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^T \right\},$$

si llamamos $v = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^T$, tenemos que los vectores que maximizan $Q(x)$ y cumplen la restricción $R(x) = 1$ son los $x \in \mathbb{R}^2$ de la forma $x = \alpha v$ que satisfacen

$$R(x) = R(\alpha v) = \alpha^2 R(v) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\sqrt{1/R(v)}.$$

Luego, hay dos vectores que maximizan $Q(x)$ sujeto a la restricción $R(x) = 1$:

$$x_M = \sqrt{1/R(v)}\, v \qquad \text{y} \qquad x_M^* = -\sqrt{1/R(v)}\, v.$$

Ejemplo 9 Consideremos el problema planteado en el Ejemplo 7, en el cual se pide minimizar

$$Q(x) = \frac{4}{9}x_1^2 - \frac{80}{9}x_1x_2 - \frac{125}{9}x_2^2 \quad \text{sujeto a la restricción} \quad 4x_1^2 + 25x_2^2 = 9.$$

La restricción puede escribirse

$$R(x) = \frac{4}{9}x_1^2 + \frac{25}{9}x_2^2 = x^T B x^T = 1,$$

con

$$B = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{25}{9} \end{bmatrix},$$

y B es definida positiva. Entonces podemos aplicar lo desarrollado.

En primer lugar hallamos los autovalores generalizados del par (A, B), donde A es la matriz simétrica asociada a $Q(x)$:

$$\det(A - \lambda B) = \frac{1}{81} \begin{vmatrix} 4 - 4\lambda & -40 \\ -40 & -125 - 25\lambda \end{vmatrix} = \frac{100}{81}(\lambda^2 + 4\lambda - 21) = \frac{100}{81}(\lambda - 3)(\lambda + 7).$$

Entonces $\lambda_m(A, B) = -7$ y

$$\min_{4x_1^2 + 25x_2^2 = 9} Q(x) = \min_{R(x)=1} Q(x) = -7.$$

Para hallar los minimizantes, debemos calcular los autovectores generalizados correspondientes al autovalor generalizado $\lambda_m(A, B) = -7$.

Para ellos hallamos primero

$$\mathrm{Nul}(A + 7B) = \mathrm{Nul}\left(\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 32 & -40 \\ -40 & 50 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{gen}\{[5 \ \ 4]^T\}.$$

Entonces el mínimo se alcanza en los x de la forma $x = \alpha[5 \quad 4]^T$ tales que $R(x) = \alpha^2 R([5 \quad 4]^T) = \alpha^2 \frac{500}{9} = 1$. Luego $\alpha = \pm\frac{3}{10\sqrt{5}}$, con lo cual los puntos que minimizan $Q(x)$ son

$$x_m = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{6}{5\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T \qquad \text{y} \qquad x_m^* = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2\sqrt{5}} & -\frac{6}{5\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T,$$

los cuales coinciden con los hallados en el Ejemplo 7 por otro método.

Ejemplo 10 Hallar los puntos de la curva de ecuación

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1$$

cuya distancia al origen es mínima .

La distancia del punto x al origen es $\|x\|$. Por lo tanto, debemos hallar los puntos x que pertenecen a la curva dada y minimizan la función $f(x) = \|x\|$. En otras palabras, debemos hallar el mínimo de $f(x)$ sujeto a la restricción $2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1$. Como los x que minimizan $\|x\|$ son exactamente los mismos que minimizan $Q(x) = \|x\|^2$, buscamos

$$\min_{2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1} Q(x).$$

Llamando $R(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$, tenemos que $R(x) = x^T Bx$ con

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que es simétrica y definida positiva.

Como $Q(x) = x^T Ix$, el mínimo de $Q(x)$ sujeta a la restricción $R(x) = 1$ es el mínimo autovalor de la matriz $B^{-1}I = B^{-1}$ (Teorema 5) y se alcanza en los autovectores de B^{-1}

asociados a ese autovalor. Como los autovalores de B^{-1} son los inversos de los de B, y los de B son $\lambda_M(B) = 3$ y $\lambda_m(B) = 1$ tenemos que $\lambda_m(B^{-1}) = 1/3$, con lo cual

$$\min_{R(x)=1} \|x\|^2 = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \min_{R(x)=1} \|x\| = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Respecto de los minimizantes, estos son los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m(B^{-1})}(B^{-1})$ tales que $R(x) = 1$. Como

$$\mathcal{S}_{\lambda_m(B^{-1})}(B^{-1}) = \mathcal{S}_{\lambda_M(B)}(B) = \text{gen}\{[1 \ \ 1]^T\}$$

y $R(\alpha[1 \quad 1]^T) = \alpha^2 R([1 \quad 1]^T) = 6\alpha^2 = 1$ si y solo si $\alpha = \pm\sqrt{1/6}$, tenemos que los x que maximizan la distancia al origen son

$$x_m = \sqrt{\frac{1}{6}}[1 \ \ 1]^T \quad \text{y} \quad x_m^* = -\sqrt{\frac{1}{6}}[1 \ \ 1]^T.$$

Note que la norma de ambos es $\sqrt{\frac{1}{3}}$, que es la mínima posible para los vectores de la curva.

El problema planteado también puede resolverse en forma geométrica de la siguiente manera. Como los autovalores de B son $\lambda_M(B) = 3$ y $\lambda_m(B) = 1$, y los correspondientes autoespacios son

$$\mathcal{S}_{\lambda_M(B)}(B) = \text{gen}\{[1 \ \ 1]^T\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\lambda_m(B)}(B) = \text{gen}\{[1 \ \ -1]^T\}$$

tenemos que con el cambio de variables $x = Py$, con

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

la ecuación $R(x) = 1$ es equivalente a

$$R(x) = 3y_1^2 + y_1^2 = \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a = \frac{1}{\sqrt{3}},\ b = 1,$$

con lo cual los puntos que satisfacen la restricción $R(x) = 1$ se encuentran sobre un elipse centrada en el origen cuyo eje menor se encuentra sobre la recta generada por $u = [1/\sqrt{2} \ \ 1/\sqrt{2}]^T$, que es la primera columna de P, es decir, sobre $\mathcal{S}_{\lambda_M(B)}(B)$, y tiene longitud $2a$, y cuyo eje mayor se encuentra sobre la recta generada por $v = [-1/\sqrt{2} \ \ 1/\sqrt{2}]^T$, que es la segunda columna de P, es decir, sobre $\mathcal{S}_{\lambda_m(B)}(B)$, y tiene longitud $2b$ (ver Figura 4.). Luego, los puntos más cercanos al origen se encuentran en los extremos del eje menor y su distancia al origen es precisamente a. Como esos puntos pertenecen a $\mathcal{S}_{\lambda_M(B)}(B)$ y tienen norma $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ellos son

$$x_m = \sqrt{\frac{1}{6}}[1 \ \ 1]^T \quad \text{y} \quad x_m^* = -\sqrt{\frac{1}{6}}[1 \ \ 1]^T.$$

Una tercera forma de resolver el problema es mediante la desigualdad de Rayleigh. En efecto, como los autovalores de B son $\lambda_M(B) = 3$ y $\lambda_m(B) = 1$, se tiene que:

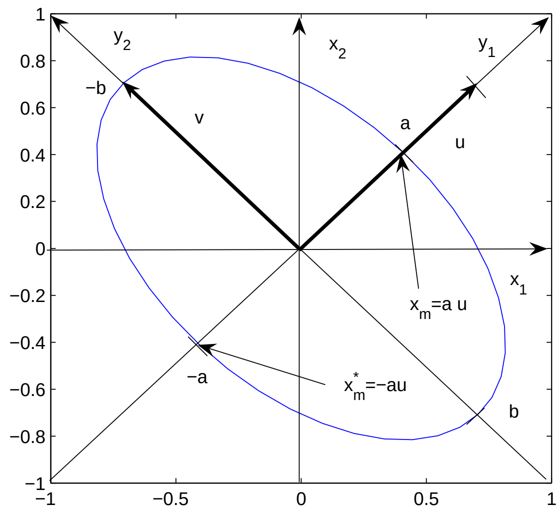

Figura 4:

(a)

$$1 \leq \frac{R(x)}{\|x\|^2} \leq 3 \ \ \forall x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{\|x\|^2}{R(x)} \leq 1 \ \ \forall x \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{3} \leq \|x\|^2 \leq 1 \quad \forall x: \ R(x) = 1.$$

Entonces $\|x\|^2 \geq 1/3$ para todo x que satisface la restricción $R(x) = 1$.

(b) Como

$$R(x) = 3\|x\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathcal{S}_{\lambda_M(B)}(B),$$

tenemos que

$$x \in \mathcal{S}_{\lambda_M(B)}(B) \text{ y } R(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \|x\|^2 = \frac{1}{3}$$

y, viceversa,

$$\|x\|^2 = \frac{1}{3} \text{ y } R(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathcal{S}_{\lambda_M(B)}(B).$$

Luego, de (a) y (b) concluimos nuevamente que

$$\min_{R(x)=1} \|x\|^2 = \frac{1}{3}$$

y que el mínimo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M(B)}(B)$ que satisfacen $R(x) = 1$.

Dadas dos formas cuadráticas $Q(x)$ y $R(x)$, cuando $R(x)$ no es definida positiva, es posible que no existan el máximo o el mínimo de $Q(x)$ sujeto a la restricción $R(x) = 1$. Para ello consideremos el siguiente:

Ejemplo 11 Hallar, si existen, el máximo y el mínimo de $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \|x\|^2$, sujeto a la restricción $-32x_1^2 + 52x_1x_2 + 7x_2^2 = 180$.

La restricción $-32x_1^2 + 54x_1x_2 + 7x_2^2 = 180$ puede escribirse

$$R(x) = \frac{1}{180}[-32x_1^2 + 54x_1x_2 + 7x_2^2] = 1,$$

y $R(x)$ es claramente indefinida ($R\left([1\ 0]^T\right) < 0$ y $R\left([0\ 1]^T\right) > 0$). Por lo tanto no puede aplicarse lo desarrollado en la sección. Sin embargo este problema puede resolverse de la siguiente manera. La forma cuadrática $Q(x) = \|x\|^2$ representa el cuadrado de la distancia de x al origen. Por lo tanto $Q(x)$ alcanzará su máximo en los puntos del conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(R)$ que se encuentren más alejados del origen y su mínimo en aquellos $x \in \mathcal{N}_1(R)$ más cercanos al origen. Para hallar tales puntos, primero determinemos qué clase de conjunto es $\mathcal{N}_1(R)$. Como $R(x) = x^T Bx$ con

$$B = \frac{1}{180}\begin{bmatrix} -32 & 26 \\ 26 & 7 \end{bmatrix}$$

y los autovalores de B son $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, y los correspondientes autoespacios son

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[1\ \ 2]^T\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[-2\ \ 1]^T\},$$

con el cambio de variable ortogonal $x = Py$, con

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$R(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y_1^2}{3^2} - \frac{y_2^2}{2^2} = 1.$$

Por lo tanto $\mathcal{N}_1(R)$ es una hipérbola, cuyos ejes son los autoespacios $\mathcal{S}_{\lambda_1}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_2}$. Los puntos más cercanos al origen del conjunto $\mathcal{N}_1(R)$ son los vértices de la hipérbola, mientras que no existen puntos que maximicen la distancia al origen, ya que el conjunto no es acotado. Respecto de los vértices x_m y x_m^* de la hipérbola, estos tienen coordenadas $y_m = (3, 0)$ e $y_m^* = (-3, 0)$ respecto del sistema de referencia y_1y_2. (Ver figura 5.)

Por lo tanto

$$x_m = Py_m = \left[\frac{3}{\sqrt{5}}\ \ \frac{6}{\sqrt{5}}\right]^T \quad \text{y} \quad x_m^* = Py_m^* = \left[-\frac{3}{\sqrt{5}}\ \ -\frac{6}{\sqrt{5}}\right]^T.$$

Como $Q(x_m) = \|x_m\|^2 = 9$ tenemos

$$\min_{R(x)=1} Q(x) = 9.$$

Como la hipérbola es un conjunto no acotado, no existe $\max_{R(x)=1} Q(x)$.

Desigualdad de Rayleigh generalizada

En lo que sigue veremos una generalización de la desigualdad de Rayleigh, que es útil en muchas circunstancias.

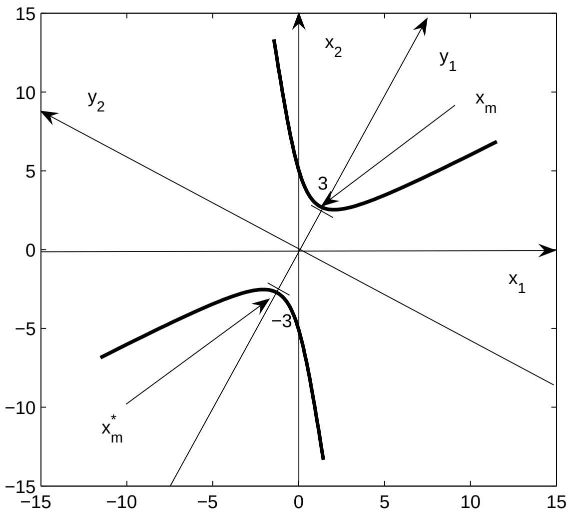

Figura 5:

Teorema 6 *Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva.*

Sean $\lambda_M(A,B)$ y $\lambda_m(A,B)$ el máximo y el mínimo autovalor de $B^{-1}A$. Sean $Q(x) = x^TAx$ y $S(x) = x^TBx$. Entonces

$$\lambda_m(A,B)S(x) \le Q(x) \le \lambda_M(A,B)S(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, $Q(x) = \lambda_m(A,B)S(x)$ si y sólo si $Ax = \lambda_m(A,B)Bx$ y $Q(x) = \lambda_M(A,B)S(x)$ si y sólo si $Ax = \lambda_M(A,B)Bx$.

Demostración. Por el Teorema 5, tenemos que

$$\max_{S(x)=1} Q(x) = \lambda_M(A,B),$$

y que el máximo se alcanza sobre los $x \in \mathcal{S}_M(A,B)$ que satisfacen $S(x) = 1$.

Por lo tanto

$$Q(x) \le \lambda_M(A,B) \quad \forall x:\ S(x) = 1.$$

Como

$$S\left(\frac{x}{\sqrt{S(x)}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{S(x)}}\right)^2 S(x) = 1,$$

Tenemos que

$$Q\left(\frac{x}{\sqrt{S(x)}}\right) \le \lambda_M(A,B).$$

Como también

$$Q\left(\frac{x}{\sqrt{S(x)}}\right) = \frac{1}{S(x)}Q(x),$$

resulta
$$Q(x) \leq \lambda_M(A,B)S(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Respecto de la igualdad $Q(x) = \lambda_M(A,B)S(x)$,

$$Q(x) = \lambda_M(A,B)S(x) \quad \Longleftrightarrow \quad Q\left(\frac{x}{\sqrt{S(x)}}\right) = \lambda_M(A,B) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{S(x)}} \in \mathcal{S}_M(A,B).$$

Como $x \in \mathcal{S}_M(A,B)$ si y solo si $Ax = \lambda_M(A,B)Bx$, tenemos entonces que

$$Q(x) = \lambda_M(A,B)S(x) \quad \Longleftrightarrow \quad Ax = \lambda_M(A,B)Bx.$$

La desigualdad
$$\lambda_m(A,B)S(x) \leq Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
y que
$$Q(x) = \lambda_m(A,B)S(x) \quad \Longleftrightarrow \quad Ax = \lambda_m(A,B)Bx,$$
se prueban en forma similar.